Geradengleichungen
und lineare Funktionen

Ausführlicher

Lese- und Lerntext für Klasse 7 bis 9

Teil 1:

Lineare Funktionen
Geraden zeichnen – Lage von Geraden
Geradengleichung aufstellen

Datei Nr. 12170

Stand 24. September 2024

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort

In der Mathematik-CD gibt es zahlreiche Texte zum Thema Gerade:

Für Klasse 7 bis 9:

12169	1. Schulstunde: Einführung von Geradengleichungen (Dieser Text)
12170	Geradengleichungen und lineare Funktionen (Für Klassenstufen 7 bis 9) (Alles – **ganz ausführlich** mit vielen Aufgaben)
12171	Schnittpunkte von Geraden berechnen
12173	Aufgabensammlung dazu (aus 12170 und 12171 entnommen)
11711	Zusammenstellung vieler Methoden zur Geometrie im Achsenkreuz: Kompakt

Ab Klasse 10:

2_Analytische Geometrie ▸ 20_Gerade ▸

Name

..
20001 Formelsammlung Gerade.pdf
20003 Schulstunde Geradengleichung.pdf
20004 Schulstunde zwei Geraden.pdf
20005 Geraden zeichnen.pdf
20006 Geradengleichung aufstellen.pdf
20007 Geraden schneiden.pdf
20008 Schulstunde Dreiecke berechnen.pdf
20010 Schulstunde - Geradens…n.pdf
20011 Geraden Aufgaben 1
20015 Winkel und Abstand C…
20017 Hesse-Norma…form fuer Ge…pdf
20020 Winkelha…de CC.pdf

sowie 11703 Orthogonale Geraden: Steigungs-Beziehung

Inhalt

Fortsetzung im Text 12171:

§ 1 Lineare Funktionen - Gleichungen mit 2 Unbekannten
(Grundwissen)

1.1 Eine Gleichung mit einer Unbekannten am Beispiel $\boxed{2x-3=9}$!

Weißt du das?

Setzt man eine Zahl der Grundmenge $\mathbb{G}$ (das sind je nach Klassenstufe die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder die reellen Zahlen $\mathbb{R}$) in die Gleichung ein (man sagt „die **Probe machen**“), dann entsteht eine **Aussage**. Diese kann wahr oder falsch sein. Die Zahlen, die zu einer wahren Aussage führen, bilden die **Lösungsmenge der Gleichung**.

Beispiel: $x=1$ einsetzen: $2\cdot 1-3=9$, d.h. $-1=$ ... Falsche Aus...

$x=6$ einsetzen: $2\cdot 6-3=9$, d.h. 9 ...: Wahre Aussage

Um zu zeigen, dass 6 die einzige Zahl ist, welche z... einer wa...n Lösung führt, ste... man die Gleichung um. Es gibt eine Reihe von Umformun... zu ei... euen Gleich... führen, die aber dieselbe Lösungsmenge haben. Man nenn... ...ivalenz... ...gen.

Gegebene Gleichung: $2x-3=$ ... $|+3$

Addition der Zahl 3: $2x-3\ \boxed{+3}$ ... 9 $\boxed{+3}$ ...f beiden Seiten!

Zusammenfassen: ... $|:2$

Division durch 2: $x=6$

Jetzt steht eine so einf... Gleichung da, da... an ihr ansieht, welche Zahl zu einer Wahren Aussage führt: Es ... NUR die Zah...

Dann schreibt man ... ösun... enge auf: $\mathbb{L}=\{6\}$.

1.2 Eine G... mit ... Unbek...ten hat eine unendliche Lösungsmenge

$$2x-y=3$$

...de Lösung muss aus ...ahlen bestehen, denn man muss ja eine für x und (eventuell) eine a... für y einsetzen. ... Mathematiker haben sich darauf geeinigt, dass man diese beiden Zahle... ein Zahlen... aufschreibt. Damit es nicht zu Missverständnissen kommt, hält man sich an die ...hab... ...ne Reihenfolge.

Aus x = ... und y = 7 bildet man das Zahlenpaar $(5\,|\,7)$.

Aus x = 2 und y = 4 bildet man das Zahlenpaar $(2\,|\,4)$.

Jedes Zahlenpaar kann man in die Gleichung einsetzen und so überprüfen, ob eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht.

Hier die Probe für das Zahlenpaar $(5\,|\,7)$: $2\cdot\boxed{5}-\boxed{7}=3$ ergbt $3=3$

In jedem Fall entsteht eine wahre Aussage. Das Paar $(5\,|\,7)$ gehört also zu den Lösungsmengen dieser Gleichungen, was man so schreibt: $(5\,|\,7)\in\mathbb{L}$.

Dann die Probe für $(2\,|\,4)$: $2\cdot\boxed{2}-\boxed{4}=3$ ergibt $0=3$

Es entsteht eine falsche Aussage

Das Paar $(2\,|\,4)$ gehört **nicht** zu den Lösungsmengen: $(2\,|\,4)\notin\mathbb{L}$.

Es sei verraten, dass es hier unendlich viele Paare gibt, welche die Gleichungen lösen.

Etwa: $(0\,|\,-3)$, $(-1\,|\,-5)$, $(\frac{7}{2}\,|\,4)$, $(-\frac{5}{3}\,|\,-\frac{19}{3})$ usw.

Wer will, kann wie soeben in einer der drei Gleichungen die Probe machen um zu erkennen, dass wirklich ein Lösungspaar vorliegt. Es gibt eine einfache Methode zur Berechnung von Lösungspaaren.

Methode zur Berechnung von Lösungspa…

1. Schritt: Man stellt die Gleichung so um, dass links y alleine ste…

Aus $2x-y-3=0$ oder aus $2x-y=3$ kommt man …n auf $\boxed{y=2x-3}$.

(In seltenen Fällen stellt man nach x um, wen… dies gü…ger ist.)

2. Schritt: Man wählt irgendeine Zahl für x, setzt diese … berech… …ann den …gehörigen y-Wert.

Zu x = 1 erhält man $y=2\cdot\boxed{…}$ …

Zu x = 5 erhält man $y=2\cdot\boxed{5}-$ … 7

Zu x = 0 erhält man … $2\cdot\boxed{0}-3=$ …

Zu x = -1 erhält … $y=2\cdot\boxed{-1}-3=-5$ …sw.

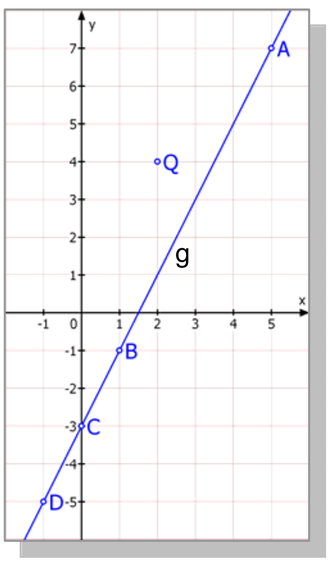
Jetzt sind d… Zahlenp… entstanden: $(1\,|\,-1)$, $(5\,|\,7)$, $(0\,|\,-3)$, $(-1\,|\,-5)$ usw.

Sie alle sind Lö… …re (kurz Lös…n) der Gleichung $y=2x-3$.

Jetzt …ennt ma… …h, dass …nen… …n viele Möglichkeiten gibt, für x eine Zahl zu wählen … dazu den passe… y-Wert … erechnen.

… Gleichung y = 2x - … besitzt somit unendlich viele Lösungspaare.

Zahlen… …e kann ma… … ein Koordinatensystem als Punkte eintragen. … … dies mit den Lösungspaaren $(5\,|\,7)$, $(1\,|\,-1)$, …$\,|\,-3)$, $(-1\,|\,-5)$ durch, erkennt man, dass sie alle auf einer Geraden liegen.



MERKE: Lösungsmenge einer linearen Gleichung auf einer Geraden

Rechts wurden diese vier Paare als Punkte A, B, C und D eingetragen.

Das Paar $(2\,|\,4)$ stellt keine Lösung der Gleichung dar. Der zugehörende Punkt Q liegt nicht auf der Geraden.

Aufgabe 1

Berechne Lösungspaare zu den Gleichungen

a) $y = x - 1$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

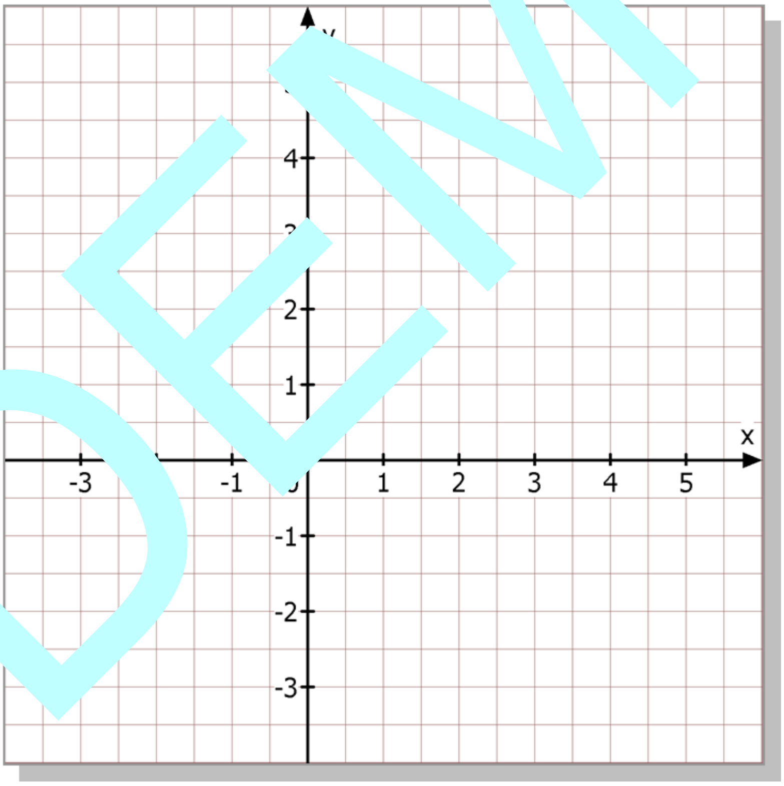
Verwende für x dazu die Zahlen aus dieser Menge: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Stelle dann die Lösungspaare als Punkte in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar

Und zeichne die zugehörenden Geraden ein.

Lösung:

	$x = -2$	$x = -1$						
$y = x - 1$								
$y = -2x + 4$								
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$								



1.3 Lineare Funktionen

Mit der oben gezeigten Berechnungsmethode (zu einer Zahl x wird eine andere Zahl y berechnet) nennt man auch eine **Funktion, genauer eine lineare** Funktion, weil eben nur die Exponenten 1 vorkommen, oder weil man die Lösungsmenge mit einem Lineal zeichen kann.

An diesen hochmathematischen Begriff muss man sich gewöhnen. Hier eine mögliche Erklärung:

> Eine Funktion ist eine **eindeutige** Zuordnungs- oder Berechnungsvorschrift, die einer Zahl des **Definitionsbereichs** eine neue Zahl zuordnet, die man den **Funktionswert** nennt.
>
> Kann man diese Zuordnungsvorschrift in eine Gleichung der Fo... $\rightarrow$ $\boxed{f(x) \ldots +b}$ bringen, nennt man sie eine **lineare Funktion**.
>
> **Den Funktionswert f(x) bezeichnet man oft y**, dann heißt ... Berechnungsvorsch... $y = ax + b$. Sehr oft schreibt man auch $y = mx + \ldots$
>
> Die grafische Darstellung der Lösungsmenge im Ko...di...system ... das Schaubild der Funktion. Lineare Funktionen haben a... Scha...d eine Gerade.

Unsere Geradengleichung kann man also au... ls li... Funkt... betrachten: $\boxed{f(x) = 2x - 3}$

Ich wiederhole jetzt die Bere...ng von Lösungspa... verwende aber die Funktionsschreibweise:

Paarberech...		Funktionswertberechnung
Zu x = 1 erhält man	$\ldots 2 \cdot \boxed{1} - 3 = -1$	$f(1) = 2 \cdot \boxed{1} - 3 = -1$
Zu x ...	$y \ldots \boxed{5} - 3$	$f(5) = 2 \cdot \boxed{5} - 3 = 7$
Z... = 0 erhält man	$y = 2 \cdot \ldots = -3$	$f(0) = 2 \cdot \boxed{0} - 3 = -3$
... x = -1 erhält man	$\ldots = 2 \cdot \boxed{-1} - 3 = -5$	$f(-1) = 2 \cdot \boxed{-1} - 3 = -5$

Man erkenn... ort, dass die ...te Schreibweise viel kürzer ist.
Links musste m... erst ...chreiben, welches x man einsetzt, und dann erst folgte die Berechnung des y-Werts (bzw. d... Koordinate des Punktes).

Rechts (in der Funktionsschreibweise) schreibt man den x-Wert in die Klammer hinter f und schon kann man den Funktionswert berechnen, der nichts anderes ist, als der zugeordnete y-Wert.

x und y zusammen bilden dann das Lösungspaar bzw. die Koordinaten des Punktes im Koordinatensystem.

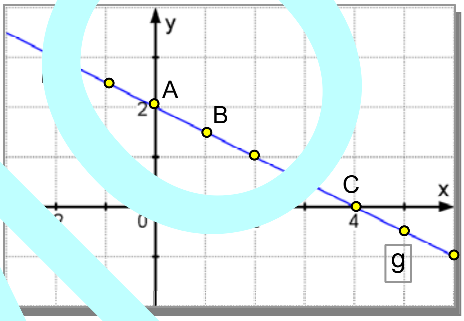
1.4 Zwei weitere Beispiele

(1) $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2}$ bzw. $\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x + 2}$

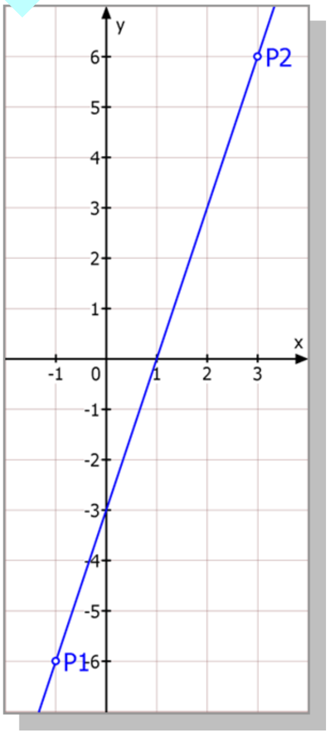
Berechnung einiger Punkte für das Schaubild (für die Gerade).

1. Methode:	2. Methode:	Lösungspunkt
$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\cdot 0 + 2 = 2$	$f(0) = -\frac{1}{2}\cdot 0 + 2 = 2$	$A(0\,\vert\,2)$
$x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\cdot 1 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$	$f(1) = -\frac{1}{2}\cdot 1 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$	$B(1\,\vert\,\frac{3}{2})$
$x = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\cdot 4 + 2 = -2 + 2 = 0$	$f(4) = -\frac{1}{2}\cdot 4 + 2 = -2 + 2 = 0$	$C(4\,\vert\,0)$
$x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\cdot(-2) + 2 = 1 + 2 = 3$	$f(-2) = -\frac{1}{2}\cdot(-2) + 2 = 1 + 2 = 3$	$D(-2\,\vert\,3)$

Man kann beliebig lange weiter machen.
Für das Schaubild (die Gerade) braucht man in der Regel nur 2 Punkte, die möglichst weit auseinander liegen sollen, damit das Schaubild genauer wird.
Rechts wurden die vier „Lösungspunkte“, man sagt besser „Geradenpunkte“ eingetragen.



(2) $\boxed{y = 3x - 3}$ oder so: $\boxed{f(x) = 3x - 3}$



Berechnung zweier Punkte zum Zeichnen der Geraden:

Ich wähle z. B. $x = -1 \Rightarrow y = 3\cdot(-1) - 3 = -6$,
d. h. $P_1(-1\,|\,-6) \in g$

Und dann: $x = 3 \Rightarrow y = 3\cdot 3 - 3 = 6$
d. h. $P_2(3\,|\,6) \in g$

In der Funktionsschreibweise sieht das so aus:

$f(-1) = 3\cdot(-1) - 3 = -6$ also $P_1(-1\,|\,-6) \in g$
$f(3) = 3\cdot 3 - 3 = 6$ also $P_2(3\,|\,6) \in g$

Hinweis:

> So wie das Beispiel (2) dargestellt worden ist, kommt man am schnellsten zum Ziel.
> Zum Zeichnen der Lösungsmenge, also der Geraden benötigt man ja nur 2 Punkte, also reicht es, zwei Paare auf diese Weise zu berechnen.

Zusammenfassung

Jede Gleichung der Form $y = mx + n$ stellt eine Gerade im Koordinatensystem dar.

Zahlenpaare, welche durch Einsetzen in die Gleichung zu einer wahren Aussage führen, gehören zur Lösungsmenge der Gleichung.

Geometrisch gedeutet sind Zahlenpaare Punkte der Geraden, und die Gerade ist die geometrische Darstellung der Lösungsmenge.

Die Berechnung von Punkten der Geraden geschieht, indem [illegible] eine Zahl auswählt, diese einsetzt und dazu y berechnet.

Die Funktionsschreibweise $y = mx + n$ eignet sich dazu [illegible]ehr gut

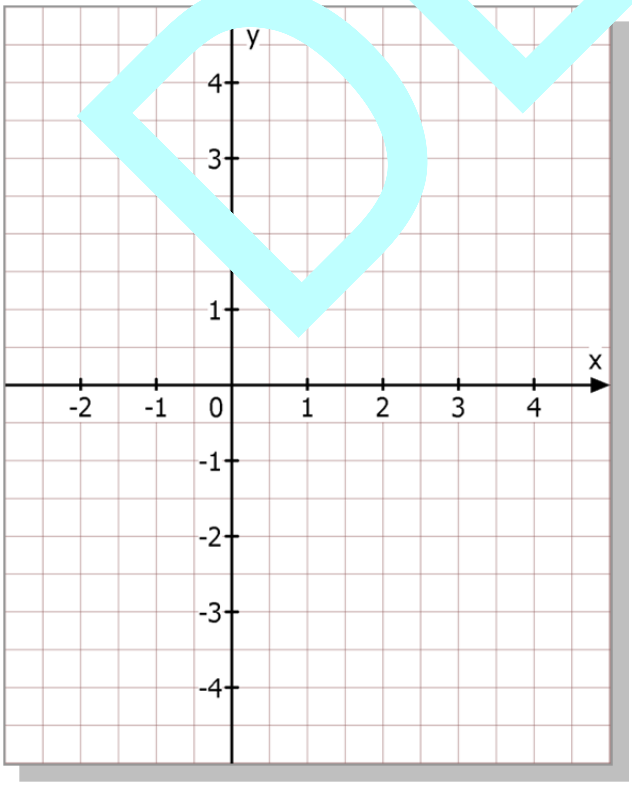
Aufgabe 2

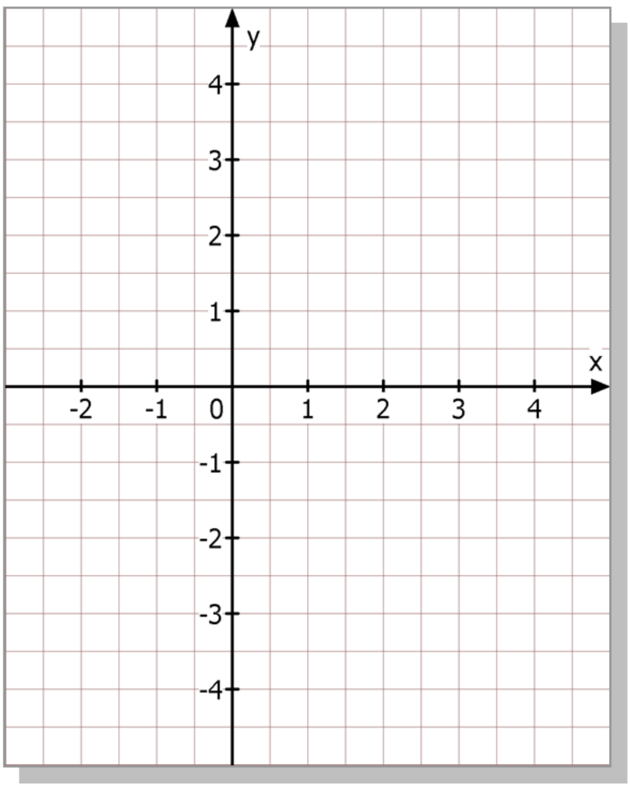
Zeichne die folgenden Geraden in die Achsenkreuze.

Berechne zu jeder Geraden zwei P[illegible]it deren Hilf[illegible]ie Gera[illegible] gezeichnet werden.

a) g: $y = -2x + 4$ und h: [illegible] sowie
k: $y = x - 3$ und [illegible] $y = -3x$ [illegible] 2

n) g: $y =$ [illegible] 2 [illegible] h: [illegible] $-\frac{4}{3}x$ sowie
k: $y = -\frac{3}{2}$ [illegible] und l: $y = \frac{5}{2}x$





§ 2 Drei Grundaufgaben für Geraden

Grundaufgabe 1: Die Punktprobe machen

Überprüfe, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt, deren Gleichung gegeben ist.

Beispiel 1

Gegeben sind $A(3|6)$, $B(-1|2)$ und g: $y = 3x - 3$.

Punktprobe mit A: Einsetzen der Koordinaten des Punktes $A(3|6)$:

Für y wird 6 und für x wird 3 eingesetzt:

$$y = 3x - 3 \quad (y: \boxed{6},\ x: \boxed{3}) \quad \longrightarrow \quad 6 = 3 \cdot 3 - 3$$

Weil die rechte Seite auch 6 ergibt, ist eine *wahre Aussage* entstanden.

Also gehört das Paar $(3|6)$ zur Lösungsmenge der Gleichung, oder was dasselbe ist:

Der Punkt $A(3|6)$ liegt auf g, was man so schreiben kann: $\boxed{A \in g}$.

Punktprobe mit $B(-1|2)$:

$$y = 3x - 3 \quad (y: \boxed{2},\ x: \boxed{-1}) \quad \longrightarrow \quad 2 = 3 \cdot (-1) - 3$$

Die durch Einsetzen entstandene Aussage lautet ausführlich $2 = -6$.

Weil sie eine ***falsche Aussage*** ist, liegt $B(-1|2)$ nicht auf g. Man schreibt auch $\boxed{B \notin g}$.

Beispiel 2

Gegeben ist die Gerade g durch $y = -\frac{1}{2}x + 3$ und zwei Punkte $P_1(4|1)$ und $P_2(-2|5)$.

Kurzlösung:

$(4|1)$ einsetzen: $\boxed{1} = -\frac{1}{2} \cdot \boxed{4} + 3$

Zusammenfassen: $1 = -2 + 3$

Dies ist eine wahre Aussage, also liegt P_1 <u>auf</u> g: $P_1 \in g$.

$(-2|5)$ einsetzen: $\boxed{5} = -\frac{1}{2} \cdot \boxed{-2} + 3$

Zusammenfassen: $5 = 1 + 3$

Dies ist eine falsche Aussage, also liegt P_2 <u>nicht auf</u> g: $P_2 \notin g$

Grundaufgabe 2:

Welche y-Koordinate muss A haben, damit A auf der Geraden g liegt?

Beispiel: Gegeben ist g: $y = 5x - 7$ und $A(2\,|\,?)$

Man setzt x = 2 in die Geradengleichung ein.

$$y = 5x - 7 \qquad \boxed{?} \qquad \boxed{2}$$

$$y = 5 \cdot \boxed{2} - 7$$
$$y_A = 10 - 7 = 3$$

Dies ist die y-Koordinate von A. Ergebnis: $A(2\,|\,3)$

Grundaufgabe 3:

Welche x-Koordinate muss B haben, damit B auf der Geraden g liegt?

Beispiel: Gegeben ist g: $y = 5x - 7$ und $B(?\,|\,3)$

Man setzt die gegebene y-Koordinate von B in die Geradengleichung ein und berechnet daraus x:

$$y = 5x - 7 \qquad \boxed{3} \qquad \boxed{?}$$

$$\boxed{3} = 5 \cdot x - 7 \qquad |+7$$
$$10 = 5x \qquad |:5$$
$$2 = x_B$$

Dies ist die gesuchte x-Koordinate von B. Ergebnis: $B(2\,|\,3)$.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gerade g durch $y = 4x - 5$.

a) Prüfe nach, welche der Punkte auf g liegen: $A(-1\,|\,1)$, $B(-2\,|\,-13)$ und $C\left(\tfrac{3}{2}\,|\,1\right)$.

b) Berechne die fehlenden y-Koordinaten von $D(2\,|\,?)$, $E(0\,|\,?)$ und $F\left(\tfrac{3}{4}\,|\,?\right)$, wenn sie auf g liegen.

c) Berechne die fehlenden x-Koordinaten von $G(?\,|\,7)$, $H\left(?\,|\,-\tfrac{1}{2}\right)$ und $I(?\,|\,-9)$, wenn sie auf g liegen.

Aufgabe 4

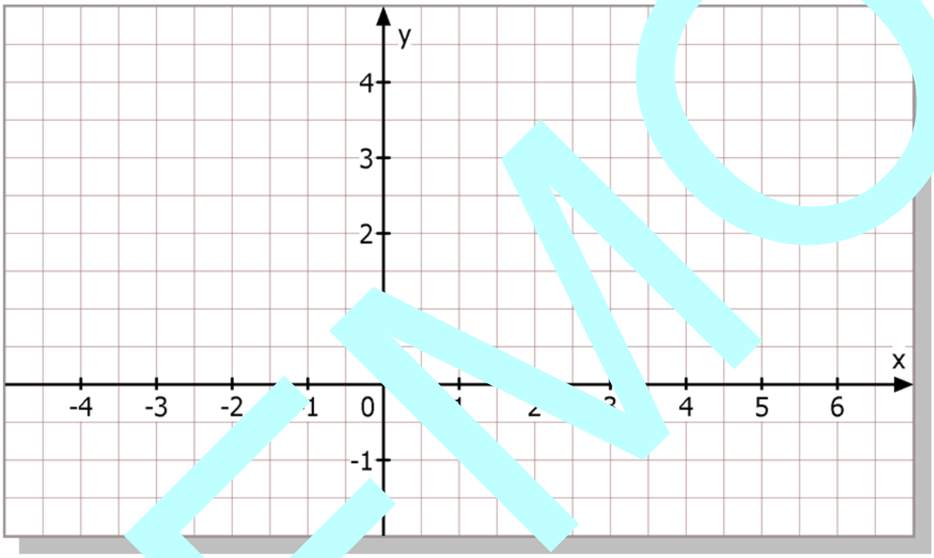
Gegeben ist die Gerade g durch die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

a) Prüfe nach, welche der Punkte auf g liegen: $A\left(3 \mid \frac{1}{2}\right)$, $B(6 \mid 5)$ und $C(-4 \mid 4)$.

b) Berechne die fehlenden y-Koordinaten von $D(6 \mid ?)$, $E(0 \mid ?)$ und $F\left(\frac{3}{4} \mid ?\right)$, wenn sie auf g liegen.

c) Berechne die fehlenden x-Koordinaten von $G(? \mid 8)$, $H\left(? \mid \frac{3}{2}\right)$ und $I(? \mid 2)$, wenn sie auf g liegen.

d) Trage 5 Punkte von g in ein geeignetes Koordinatensystem ein und zeichne g. (x-Achse von -4 bis 6)



Aufgabe 5

Gegeben ist die Gerade g durch $y = \frac{2}{3}x$ [illegible].

a) Prüfe nach, welche der Punkte auf g liegen: $A(1 \mid 2)$, $B\left(-2 \mid \frac{1}{3}\right)$ und $C\left(\frac{1}{2} \mid 2\right)$.
wenn sie auf g liegen.

b) Berechne die fehlenden y-Koordinaten von $D(-2 \mid ?)$, $E(0 \mid ?)$ und $F(9 \mid ?)$.
wenn sie auf g liegen.

c) Berechne die fehlenden x-Koordinaten von $G\left(? \mid -\frac{1}{3}\right)$, $H\left(? \mid -\frac{1}{2}\right)$ und $I\left(? \mid \frac{19}{6}\right)$.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ und h durch $y = 2x + 1$.

a) Auf g liegen die Punkte $A(3 \mid y)$ und $B(x \mid 4)$. Berechne x und y.

b) Liegen $C(2 \mid 3)$ oder $D\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{5}{2}\right)$ auf h?

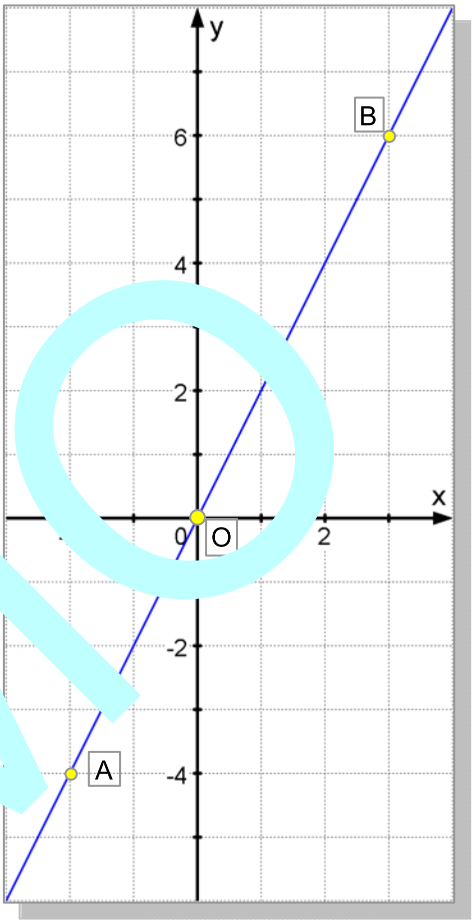
c) Zeige, dass der Schnittpunkt von g und h die x-Koordinate 1 hat. Berechne S.
Anleitung: Berechne y_S aus den Gleichungen von g und h. Woraus erkennt man dann, dass es sich um den Schnittpunkt von g unh handelt?

Die Lösungen aller Aufgaben stehen im Text 20011.

§ 3 Ursprungsgeraden

Wir betrachten jetzt Gleichungen der Form $\boxed{y = mx \quad \text{bzw.} \quad f(x) = mx}$

Beispiel 1 $\quad \boxed{y = 2x}$



Berechnung von drei Lösungspaaren:

$x = -2 \;\Rightarrow\; y = 2\cdot(-2) = -4 \qquad$ d.h. $A(-2|-4) \in g$

$\boxed{x = 0 \;\Rightarrow\; y = 2\cdot 0 = 0} \qquad$ d.h. $\boxed{O(0|0) \in g}$

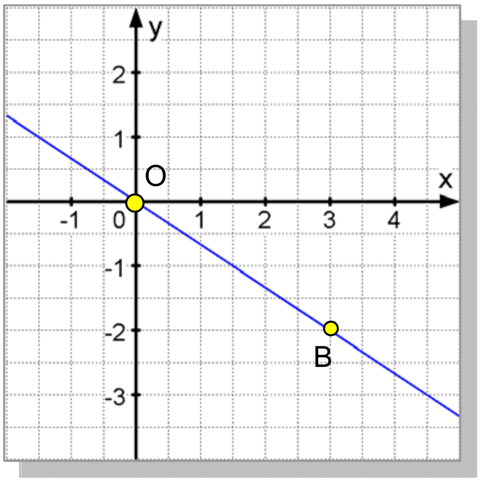
$x = 3 \;\Rightarrow\; y = 2\cdot 3 = 6 \qquad$ d.h. $B(3|6) \in g$

Wichtige Beobachtung bei dieser Rechnung und dem Schaubild rechts:

> Weil hinter y = 2x kein Summand mehr steht,
> gibt es zu x = 0 auch „nur“ y = 0.
> Daher ist das Paar $(0|0)$ eine Lösung.
> Also geht die Gerade durch den Punkt $O(0|0)$,
> den man den Ursprung des Koordinatensystems
> nennt.

Eine Gerade durch den Ursprung nennt man eine
Ursprungsgerade.

Beispiel 2 $\quad \boxed{y = -\tfrac{2}{3}x}$



Die zugehörige Gerade ist eine Ursprungsgerade, denn es gilt:

$\boxed{x = 0 \;\Rightarrow\; y = -\tfrac{2}{3}\cdot 0 = 0} \qquad$ d.h. $\boxed{O(0|0) \in g}$

Zur Zeichnung reicht ein weiterer Punkt, etwa B;

$x = 3 \;\Rightarrow\; y = -\tfrac{2}{3}\cdot 3 = -2 \qquad$ d.h. $B(3|-2) \in g$

MERKE:

> Jeder Gleichung der Form $\boxed{y = m\cdot x}$ hat als Schaubild
> eine Ursprungsgerade,
> **denn zu x = 0 erhält man stets y = 0.**

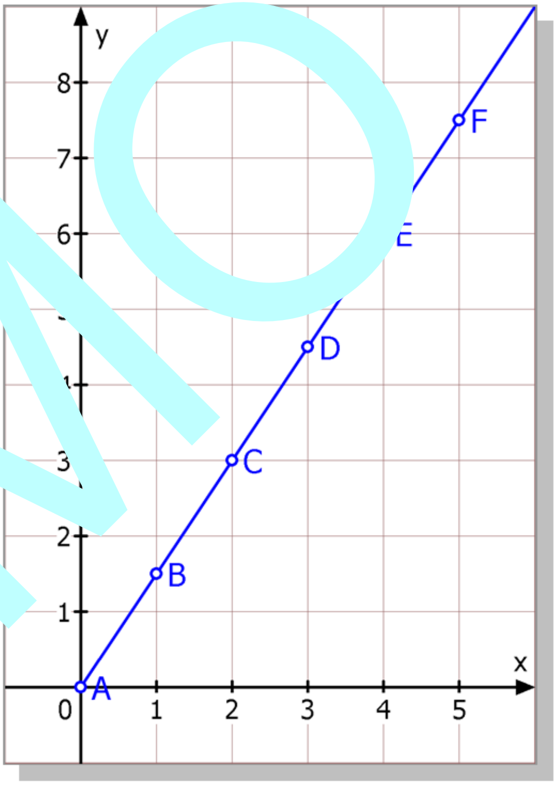
Einschub – für die Interessierten:

Eine Anwendung der Ursprungsgeraden sind Proportionalitäten

Es gibt einen eigenen Text für Proportionalitäten (10511), in dem man viele weitere Beispiele findet. Dort erfährt man auch, wie man geschickt Werte zu proportionalen Größen berechnen kann.

Zwei Größen x und y, zwischen denen eine Beziehung besteht, welche die Form $y = mx$ haben, nennt man zueinander proportional.

Beispiel 3



In Florenz kostet eine Kugel Eis 1,50 €.

2 Kugeln Eis kosten dann $1{,}50\ € \cdot 2 = 3{,}00\ €$

3 Kugeln Eis kosten dann $1{,}50\ € \cdot 3 = 4{,}50\ €$

4 Kugeln Eis kosten dann $1{,}50\ € \cdot 4 = 6{,}00\ €$

Die Formel dafür lautet erkennbar: $\boxed{y = 1{,}50 \cdot x}$

Hier ist immer der Preis y das 1,5-fache der Anzahl x der Kugeln.

Die Bruchform $\boxed{\frac{y}{x} = 1{,}5}$ ist sehr gut dafür geeignet, diese Beziehung zu überprüfen

Etwa so:

Marco hat hinter dem Dom für seine Familie eine Großportion mit 13 Kugeln gekauft und dafür 19,50 € bezahlt. Seine Freundin Sara überlegt, ob er eventuell Mengenrabatt bekommen hat und gibt daher in ihren Taschenrechner ein: $\frac{19{,}50}{13} = 1{,}50$.

Das Ergebnis zeigt, dass kein Preisnachlass gewährt worden ist.
Ja, in Florenz ist das Eis offenbar etwas teurer als anderswo …

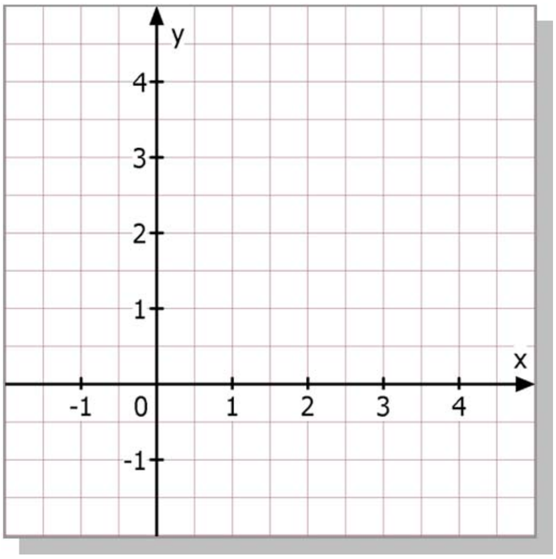
Wenn der Quotient aus Preis und Anzahl konstant ist, nennt man die Beziehung Preis – Anzahl eine Proportionalität.

Ihre Gleichung ist $\boxed{y = 1{,}50 \cdot x}$ und ihr Schaubild eine Ursprungsgerade.

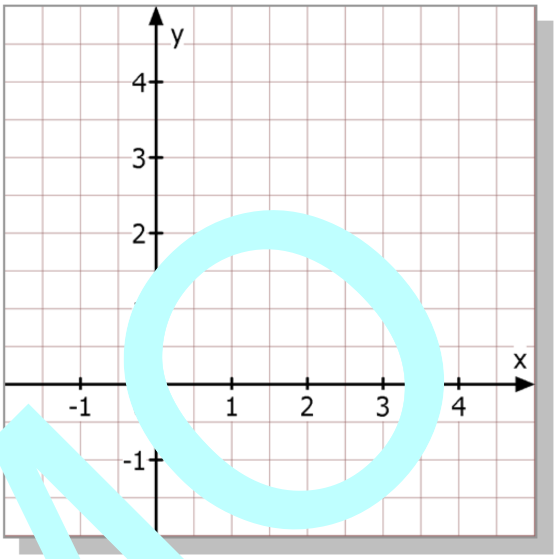
Aufgabe 7

Erstelle eine Wertetabelle und zeichne die folgenden Geraden:

a) $y = -x$

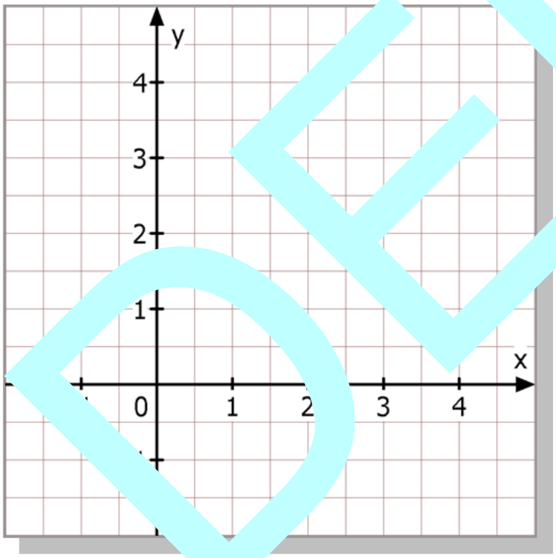


b) $y = \frac{3}{2}x$

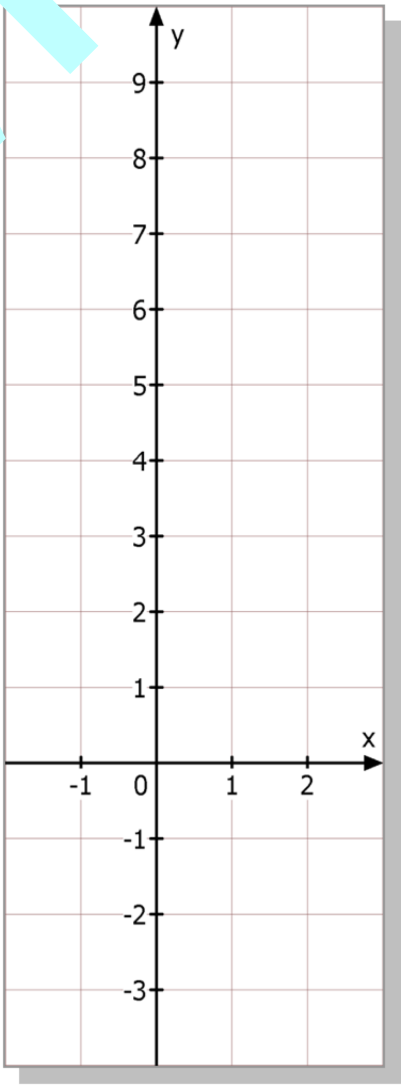


y

c) $y = -\frac{2}{3}x$



d) $y =$



§ 4 Steigung und y-Achsenabschnitt

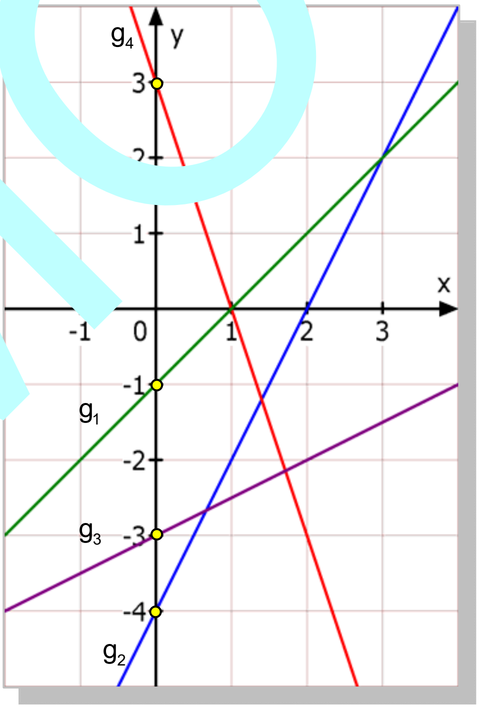
Die Berechnung zweier Punkte extra zum Zeichnen einer Geraden, ist eine umständliche Methode. Man kann nämlich der Geradengleichung einige Fakten zum Zeichnen direkt entnehmen und somit ganz rasch die Zeichnung anfertigen. In der Gleichung $y = \boxed{m} \cdot x + \boxed{n}$ sind dies die Werte von m und n. Dies lernen und üben wir jetzt.

4.1 Das Absolutglied „n" der Geradengleichung

Hier folgen 4 Geradengleichungen, rechts sehen wir ihre Schaubilder:

g_1: $y = x - 1$ g_2: $y = 2x - 4$

g_3: $y = \frac{1}{2}x - 3$ g_4: $y = -3x + 3$



Wo schneiden sie die y-Achse?

Alle Punkte der y-Achse haben x-Koordinate 0.

Setzt man also für x die Zahl 0 in eine Geradengleichgung $y = m \cdot x + n$ ein, dann folgt:

$\boxed{x = 0} \Rightarrow y = m \cdot \boxed{0} + n$ also $\boxed{y = n}$

Das Aboslutglied „n" (die Zahl ohne x) sagt uns demnach, wo eine Gerade die y-Achse schneidet: Bei y = n.

Damit erhält man diese Schnittpunkte mit der y-Achse:

g_1: $y = \boxed{0} - 1 = -1$: $S_1(0 \mid -1)$

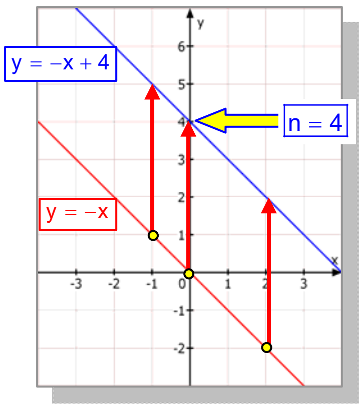
g_2: $y = 2 \cdot \boxed{0} - 4 = -4$: $S_2(0 \mid -4)$

g_3: $y = \frac{1}{2} \cdot \boxed{0} + \boxed{-3}$ $S_3(0 \mid -3)$

g_4: $y = -3 \cdot \boxed{0} + 3 = 3$ $S_4(0 \mid 3)$

Hinweis:

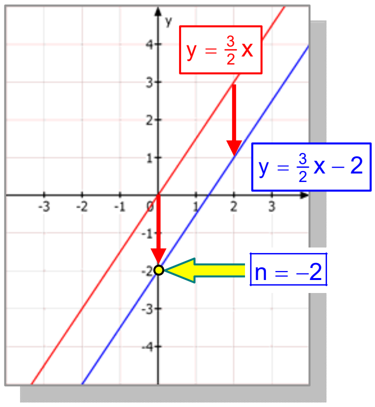
Man kann die Bedeutung des Absolutglieds auch als Verschiebung einer Ursprungsgeraden in Richtung der y-Achse deuten:



Beispiel

$y = -x + 4$ entsteht aus $y = -x$ durch Verschiebung um 4 in y-Richtung. Man erkennt auch hier sofort an der Gleichung den y-Achsen-Abschnitt +4: $\boxed{n = 4}$.

Noch ein Beispiel:



$y = \frac{3}{2}x - 2$ entsteht aus $y = \frac{3}{2}x$ durch Verschiebung um -2 in y-Richtung.
Man erkennt auch hier sofort den y-Achsen-Abschnitt $\boxed{n = -2}$.

MERKE:

Die Gleichung **$y = mx + n$** stellt eine Gerade dar,
welche die y-Achse bei y = n schneidet.
Das Absolutglied der Gleichung liefert also sofort
den ersten Geradenpunkt $S(0 \mid n)$ für die Zeichnung.
Fehlt dieses Absolutglied, dann ist es 0, und die Gerade
ist eine Ursprungsgerade.

Jetzt haben wir also bereits einen Punkt, den wir ohne neue Rechnung direkt einer Geradengleichung entnehmen können.

Aufgabe 8

Schreibe die Schnittpunkte der Geraden mit der y-Achse als Punkt in der Form „$S(4 \mid -2)$" auf.

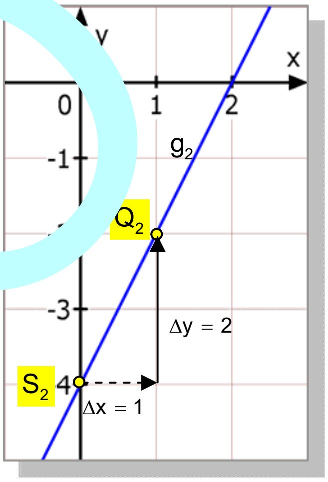
a) $y = 3x + 6$ c) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{7}$
b) $y = 5 - 2x$ d) $x + y = 4$
e) $2x - 4y = 8$ f) $3x - 5y + 6 = 0$

4.2 Die Steigungszahl m in einer Geradengleichung

MERKE: In der Geradengleichung $y = m \cdot x + n$ heißt die Zahl, die für m steht, die Steigung (oder den Anstieg) der Geraden. Wir betrachten wieder vier Geraden:

g_1:	$y = \boxed{1} \cdot x - 1$	Steigung:	$m = 1$	$S_1(0 \mid -1)$
g_2:	$y = \boxed{2} \cdot x - 4$	Steigung:	$m = 2$	$S_2(0 \mid -4)$
g_3:	$y = \boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot x - 3$	Steigung:	$m = \tfrac{1}{2}$	$S_3(0 \mid -3)$
g_4:	$y = \boxed{-3} \cdot x + 1$	Steigung:	$m = -3$	$S_4(0 \mid 1)$

Hinter jeder Geraden steht der zugehörende Schnittpunkt S mit der y-Achse. Nun bitte mitdenken, denn es wird sehr wichtig. Du kannst hier lernen, welche Bedeutung die Steigungszahl hat.



Methode: Wir gehen auf jeder Geraden von diesem Schnittpunkt S aus um 1 in x-Richtung und berechnen den dort liegenden Punkt Q. Dazu setzen wir für x die Zahl 1 ein:

(a) Ich beginne mit g_2: $y = \boxed{2} \cdot x - 4$ mit $S_2(0 \mid -4)$

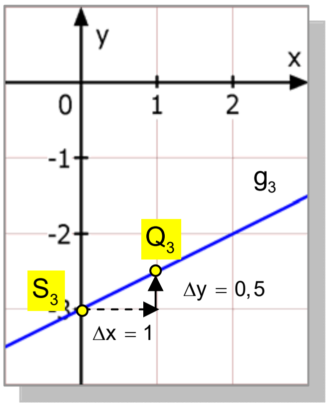
Zu x = 1 folgt $y = \boxed{2} \cdot 1 - 4 = -2$: $Q_2(1 \mid -2)$

Daraus folgt: $\Delta y = y_Q - y_S = -2 - (-4) = -2 + 4 = 2 \Rightarrow \boxed{\Delta y = 2}$

> Mit Δx bezeichnet man die Länge einer Strecke in x-Richtung, und
> Δy ist die Länge einer Strecke in y-Richtung

Dieses kleine Dreieck Δ ist der große griechische Buchstabe „Delta". Man liest also Δy als „Delta y".
Δy wird als Differenz der beiden y-Koordinaten berechnet.

Ergebnis: Geht man von S_2 nach Q_2 um die Strecke $\Delta x = 1$ nach rechts, dann muss man um $\Delta y = 2$ nach oben. Die Ursache dafür ist eben diese Steigungszahl 2.



(b) Wir untersuchen g_3: $y = \boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot x - 3$ mit $S_3(0 \mid -3)$

Zu x = 1 folgt $y = \boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot 1 - 3 = -2,5$ $Q_3(1 \mid -2,5)$

Es folgt: $\Delta y = y_Q - y_S = -2,5 - (-3) = -2.5 + 3 = 0,5 \Rightarrow \boxed{\Delta y = \tfrac{1}{2}}$

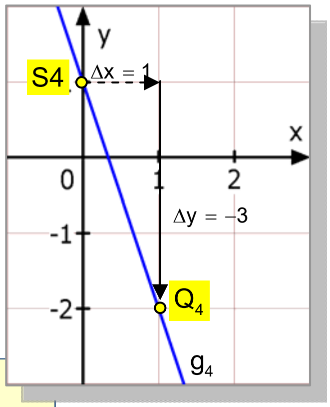
Ergebnis: Geht man von S_3 nach Q_3 um die Strecke $\Delta x = 1$ nach rechts, dann muss man um $\Delta y = \tfrac{1}{2}$ nach oben.
Die Ursache dafür ist die Steigungszahl $\tfrac{1}{2}$, die dafür sorgt, dass es um $\tfrac{1}{2}$ nach oben geht.

Achtung: Wenn man hier Δy so berechnet: $\Delta y = y_S - y_Q = -3 - (-2,5) = 2,5 - 3 = -0,5$, wird $\boxed{\Delta y = -\tfrac{1}{2}}$ negativ. Dann passt das nicht mehr zusammen. Man muss bei Δx und Δy die Reihenfolge der Punkte für die Differenz gleich machen.

(c) Wir untersuchen g_4: $y = \boxed{-3} \cdot x + 1$ mit $S_4(0 \mid 1)$

Zu x = 1 folgt $y = \boxed{-3} \cdot 1 + 1 = -2$ $Q_4(1 \mid -2)$

Daraus folgt: $\Delta y = y_Q - y_S - 2 - 1 = -3 \Rightarrow \boxed{\Delta y = -3}$



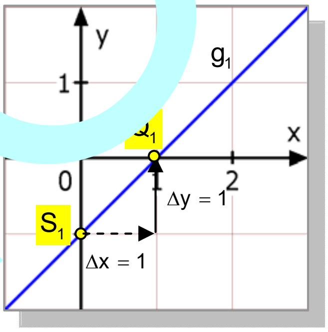
ACHTUNG: **Wenn** Δy **negativ wird**, dann ist die Länge der Strecke davon nur der Betrag, also 3. Das Minuszeichen gibt die Richtung an:

Ergebnis: Geht man von S_4 nach Q_4 um die Strecke $\Delta x = 1$ nach rechts, dann muss man um $\Delta y = -3$ nach oben, d. h. um 3 nach unten. Die Ursache dafür ist wieder die Steigungszah[illegible] $= -3$.

(d) Jetzt die Gerade g_1: $y = \boxed{1} \cdot x - 1$ mit $S_1(0 \mid -$[illegible]

Zu x = 1 folgt: $y = \boxed{1} \cdot 1 - 1 = 0$ [illegible]$(1 \mid 0)$

Daraus folgt: $\Delta y = y_Q - y_S = 0 - (-1) = 1$ [illegible]



Ergebnis: Geht man von S_1 nac[illegible] Strecke $\Delta x = 1$ nach rechts, dann mu[illegible] man u[illegible] $= 1$ [illegible] oben. Die Ursache dafür ist die [illegible]gungszahl m [illegible] die dafü[illegible] dass es um 1 nach oben geht.

Beobachtung:
Die Änderung [illegible] y-Ko[illegible]nate ist genau so groß, wie die Steigungszahl angibt, wenn man [illegible] nach rech[illegible] geht.
Ist di[illegible] bei g_2) [illegible]ativ, d[illegible] verkleinert sich die y-Koordinate.

Für die guten Ma[illegible]matiker hier dazu die allgemeine Rechnung als Beweis:

(e) Wir un[illegible]chen g: $y = mx + n$: mit $S(0 \mid n)$

Zu $x_Q = 1$ [illegible]: $y_Q = m \cdot 1 + n = m + n$ $Q(1 \mid m + n)$

Daraus folgt: $\Delta y = y_Q - y_S = m + n - n = m \Rightarrow \boxed{\Delta y = m}$

Geht man also von S aus um $\Delta x = 1$ nach rechts, muss man stets um $\Delta y = m$ nach oben.

Aufgabe 9

Welche Steigungen haben diese Geraden:

a) $y = 3x + 6$ b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{7}$ c) $y = 5 - 2x$

d) $x + y = 4$ e) $2x - 4y = 8$ f) $3x - 5y + 6 = 0$

4.3 Zeichnen einer Geraden - 11 Beispiele

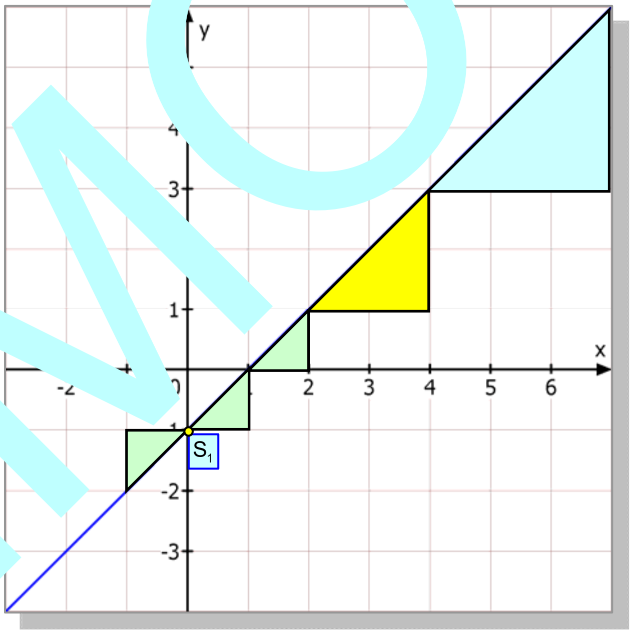
B1 Gerade g_1: $y = \boxed{1} \cdot x - 1$ Steigung: $m = 1$

y-Achsenabschnitt: $S_1(0 \mid -1)$

1. Schritt: Man benötigt einen „Startpunkt" für die Zeichnung.
Günstig ist oft x = 0. Setzt man dies in die Zeichnung ein, folgt y = -1.
So bekommt man den Schnittpunkt $S(0 \mid -1)$ mit der y-Achse (siehe 4.1).

2. Schritt: Die Gerade hat die Steigung $m = 1$.
Wenn x um $\Delta x = 1$ zunimmt, dann nimmt y um $\Delta y = 1$

Zeichnung:



Die Abbildung enthält dreierlei Steigungsdreiecke, mit denen man, ausgehend von einem Geradenpunkt, zu einem weiteren Geradenpunkt findet.

Von S_1 aus habe ich eines nach rechts oben gezeichnet: 1 nach rechts und m = 1 nach

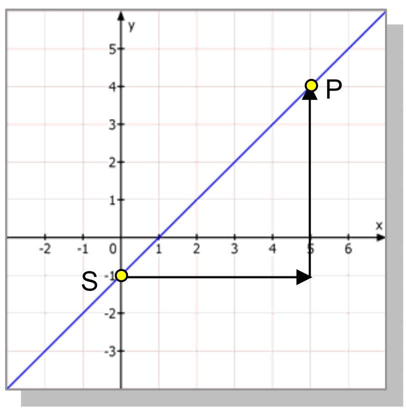
Oder 1 nach links und m = 1 nach u en.

Das gelbe Dreieck wurde in en Abmessungen verdoppelt: 2 nach recht d 2m = 2 na ben.

Das hellblaue; 3 nach rechts 3 nach oben.

Rats ag:

Für eine ue Zeichnung sc man 2 oder 3 möglichst weit auseinander liegende Punkte haben, dann wird die bildung gen r, als bei dicht beisammen liegenden Punkten.
Ich würde in dies Fall $S(0 \mid -1)$ ausgehend ein großes Steigungsdreieck einzeichnen.
Etwa 5 nach rechts u nach oben.
So bekommt man den zweiten Punkt $P(5 \mid 4)$ und kann die Gerade sauber einzeichnen.



B2 Gerade g_2: $\boxed{y = \boxed{2} \cdot x - 4}$ Steigung: $m = 2$

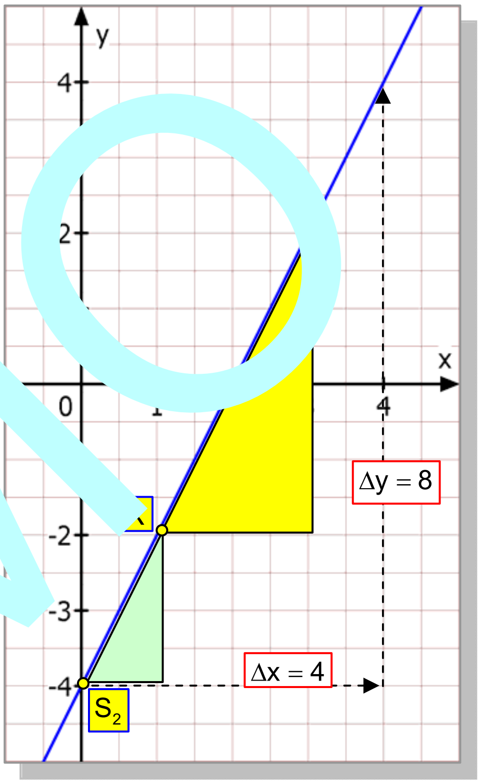
y-Achsenabschnitt: $S_2(0 \mid -4)$

1. Schritt: Man wählt $S_2(0 \mid -4)$ als Startpunkt“ für die Zeichnung.

2. Schritt: Die Gerade hat die Steigung $m = 2$.

Wenn x um $\Delta x = 1$ zunimmt, dann nimmt y um $\Delta y = 2$ zu.

Zeichnung:



Jetzt sind zwei Steigungsdreiecke dargestellt.

Das grüne geht von S_2 aus um 1 (cm) nach rechts und um m = 2 (cm) nach oben bis R.

Das gelbe geht von R aus um 2 (cm) nach rechts und um $2 \cdot m = 4$ nach oben.

Wenn man also die horizontale Strecke Δx einzeichnet, dann wird die vertikale Strecke $\Delta y = 2 \cdot \Delta x$ doppelt so groß, weil die Steigung m = 2 ist.

Die Formel $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ muss in diese… Fall imm… ergeb…

Würde man also um $\Delta x = 4$ n… rechts gehen, dan… üsste $\Delta y = 8$ die Konsequenz … (Gestriche… feile!)

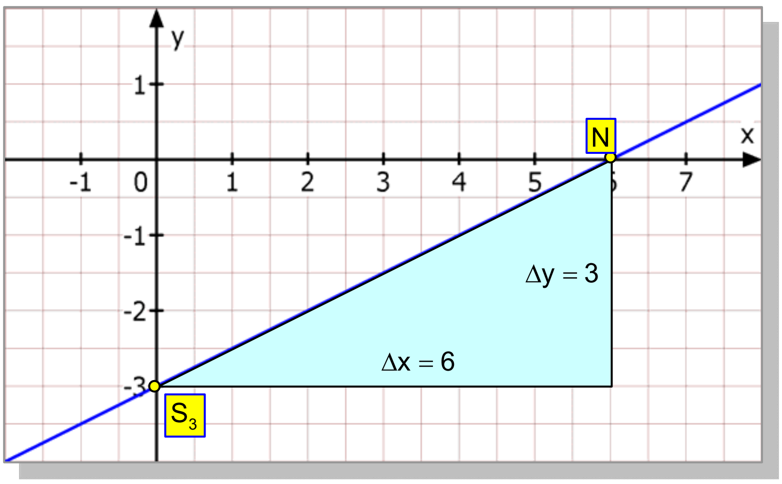
Ratschlag:

Zeichne S_2 und d… ein großes …igungsdreie… mit der Basis $\Delta x = 4$ und der Höhe $\Delta y = 8$.

B3 …de g_3: $\boxed{y = \boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot x - …}$ Steigung: $m = \frac{1}{2}$

y-Achsenabschnitt: $S_3(0 \mid -3)$

Die Steigung m = … …an durch ein großes Steigungsd…eieck realisieren.



In der Abbildung habe ich als Basis $\Delta x = 6$ gewählt und dann $\Delta y = 3$ als Höhe des Steigungsdreiecks.

Die Formel $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

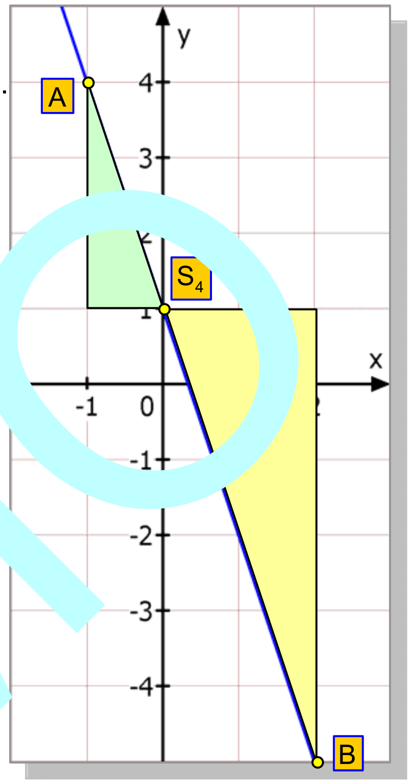
bestätigt dieses Vorgehen.

B4 Gerade g_4: $y = \boxed{-3} \cdot x + 1$ Steigung: $m = -3$

y-Achsenabschnitt: $S_4(0\,|\,1)$

1. Schritt: Startpunkt sei der Schnittpunkt $S_4(0\,|\,1)$ mit der y-Achse.

2. Schritt: Die Gerade hat die Steigung $m = -3$.
Wenn x um $\Delta x = 1$ zunimmt, dann nimmt y um $\Delta y = -3$ zu, d.h. man geht um 3 nach unten.



Ratschlag:

Zeichne S_4 und füge dann zwei Steigungsdreiecke an.

Zuerst statt um 1 nach rechts und um 3 nach unten zu gehen verdopple ich und wähle $\Delta x = 2$, dann wird $\Delta y = -6$. (gelbes Dreieck).

Hier empfiehlt es sich, noch ein Dreieck nach links e[illegible] zu verwenden. Man geht etwa um 1 nach links und d[illegible]n um 3 nach oben.

B5 Gerade g_5: $y = \boxed{-\frac{4}{7}} \cdot x + 2$ Steigung: $m = -\frac{4}{7}$

y-Achsenabschnitt: $S_5(0\,|\,2)$

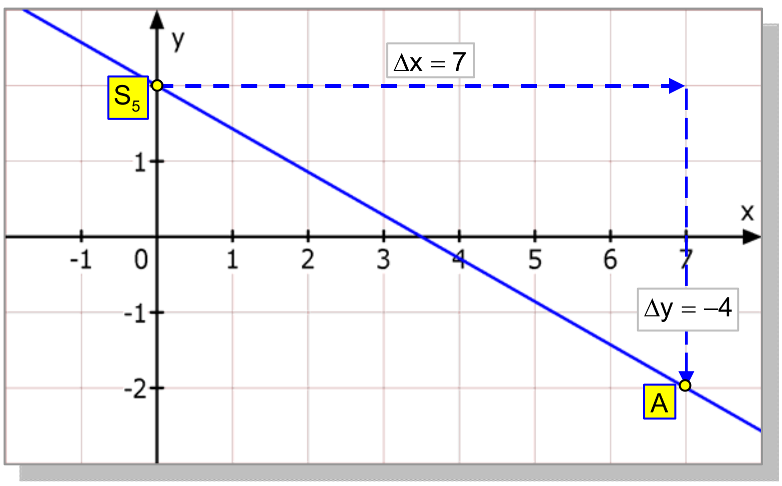
1. Schritt: Startpunkt sei der Schnittpunkt $S_5(0\,|\,2)$ mit der y-Achse.

2. Schritt: Die Gerade hat die Steigung $m = -\frac{4}{7}$.
Wenn x um $\Delta x = 1$ zunimmt, dann nimmt y um $\Delta y = -\frac{4}{7}$ zu.

Die Steigung $m = -\frac{4}{7}$ interpretiert man jedoch so, dass man gleich das Siebenfache nimmt:
Zu $\Delta x = 7$ gehört dann $\Delta y = -4$.

Man liest das so ab:

$$m = \frac{\boxed{-4} \rightarrow \Delta y}{\boxed{7} \rightarrow \Delta x}$$



B6 Gerade g_6: $y = \frac{2}{5} \cdot x + 1$

Steigung: $m = \frac{2}{5}$

y-Achsenabschnitt: $S_6(0 \mid 1)$

1. Schritt: Startpunkt sei der Schnittpunkt $S_6(0 \mid 1)$ mit der y-Achse.

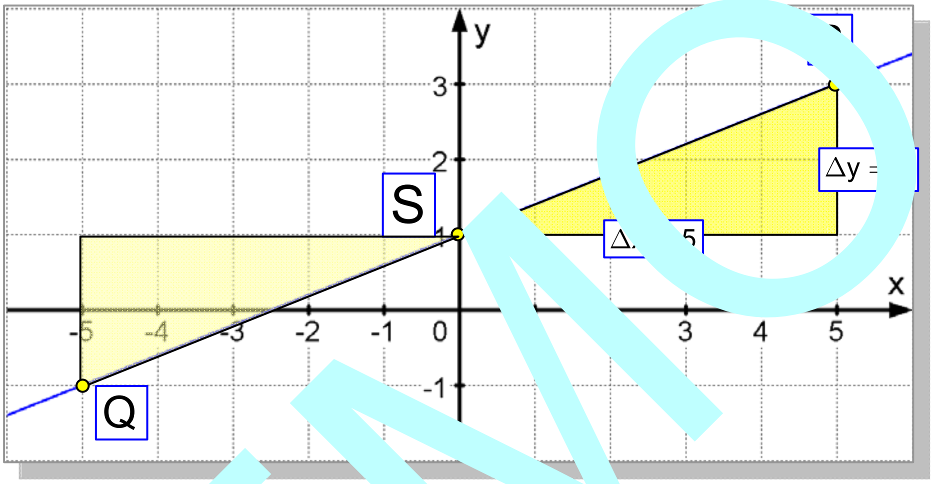
2. Schritt: Die Gerade hat die Steigung $m = \frac{2}{5}$.

Wenn x um $\Delta x = 1$ zunimmt, dann nimmt y um $\Delta y = \frac{2}{5}$ zu,

Günstiger ist es, gleich von beidem das Fünffache zu nehmen.

Wir verwenden also $\Delta x = 5$ und dazu $\Delta y = 2$.

$$m = \frac{\boxed{2} \to \Delta y}{\boxed{5} \to \Delta x}$$



Ich habe ein zweites Steigungsdreieck nach links unten gezeichnet.

B7 Gerade g_7: $y = \frac{7}{3} \cdot x - 3$

Steigung: $m = \frac{7}{3}$

y-Achsenabschnitt: $S_7(0 \mid -3)$

1. Schritt: Startpunkt sei der Schnittpunkt $S_7(0 \mid -3)$ mit der y-Achse.

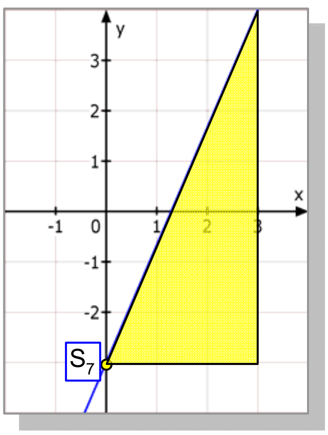
2. Schritt: Die Gerade hat die Steigung $m = \frac{7}{3}$.

Wenn x um $\Delta x = 1$ zunimmt, dann nimmt y um $\Delta y = \frac{7}{3}$ zu,

Günstiger ist es, gleich von beidem das Dreifache zu nehmen.

Wir verwenden also $\Delta x = 3$ und dazu $\Delta y = 7$.

$$m = \frac{\boxed{7} \to \Delta y}{\boxed{3} \to \Delta x}$$



B8 Gerade g_8: $\boxed{y = \boxed{-\frac{1}{2}} \cdot x + \frac{3}{2}}$

Steigung: $m = -\frac{1}{2}$

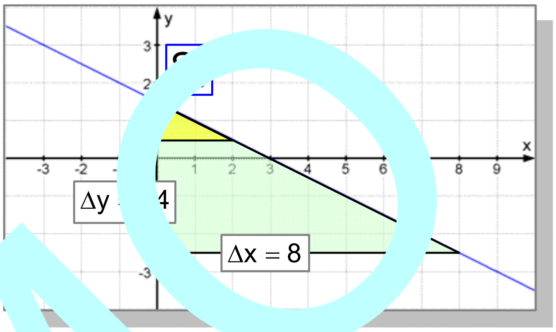
y-Achsenabschnitt: $S_8\left(0 \mid \frac{3}{2}\right)$

1. Schritt: Startpunkt sei der Schnittpunkt $S_8\left(0 \mid \frac{3}{2}\right)$ mit der y-Achse.

2. Schritt: Die Steigung $m = -\frac{1}{2}$ realisieren wir durch ein Steigungsdreieck mit $\Delta x = 4$ und $\Delta y = -2$.

Die negative Steigung vermittelt sofort, dass die Gerade fällt.

$$\mathbf{m} = \frac{\boxed{-1} \to \Delta y}{\boxed{2} \to \Delta x} \text{ oder } = \frac{\boxed{-4} \to \Delta y}{\boxed{8} \to \Delta x}$$

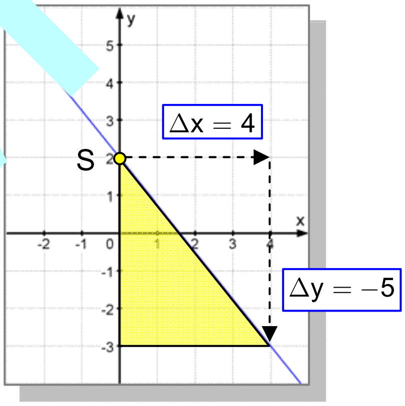


B9 Gerade g_9: $\boxed{\mathbf{y = -\frac{5}{4}x + 2}}$

$$\mathbf{m} = \frac{\boxed{-5} = \Delta y}{\boxed{4} = \Delta x}$$

für das Steigungsdreiec[illegible]

[illegible]chsen – Abschn[illegible]
[illegible]unkt $S(0 \mid 2)$ [illegible]uf der y – [illegible]se!



Wic[illegible]ig: **Das Steig[illegible]gsdreieck muss man nicht einzeichnen. Es genügt das Abzählen [illegible]r Kästchen, um den nächsten Punkt zu finden.**